Enseignant: Ales Janka Algèbre linéaire II

Série 20

À rendre avant le jeudi 23 avril, 14h

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel réel et $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur V avec norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$, et mérique $d : V \times V \to \mathbb{R},\ d(v, \tilde{v}) := \|\tilde{v} - v\|$. Montrez les points suivants:

a) $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ pour tout $v, w \in V$.
On appelle parfois cette égalité "l'égalité de Pythagore", expliquez pourquoi.

b) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ pour tout $v, w \in V$. On appelle cette égalité "l'égalité du parallélogramme", expliquez pourquoi.

c) $d(v, z) \leq d(v, w) + d(w, z)$ pour tout $v, w, z \in V$.

d) $d(v, z) \geq |d(v, w) - d(w, z)|$ pour tout $v, w, z \in V$.

Exercice 2

Lesquelles des formules ci-dessous forment des produits scalaires $\langle x, y\rangle$ des vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ et $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ de $\mathbb{R}^3$?

a) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 2x_3y_3$

b) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$

c) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3^2y_2$

Exercice 3

Soit n un entier ainsi que $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ des nombres réels. Sous quelles conditions l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad , \qquad \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i\, y_i$$

est-elle un produit scalaire des vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 4

Soit $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

équippé d'un produit scalaire euclidien canonique $\langle v, w\rangle = v^T w$. En utilisant le processus de Gram-Schmidt, trouvez la base orthonormée de V. Dessinez le processus sur un croquis en 3D.

Exercice 5
Soit $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$ avec

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

muni d'un produit scalaire

$$\langle v, w \rangle = v^T D^T D\, w$$

où

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

a) Prouvez que $\langle v, w \rangle$ est bel et bien un produit scalaire euclidien.

b) En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, trouvez la base ortghonormée de V par rapport au produit scalaire donné.

Exercice 6
Lisez attentivement les corrections de la série précédente.

a) Expliquez une ou plusieurs erreurs, qui ont fait que vous n'avez pas atteint un objectif d'apprentissage.

b) Rédigez une correction de l'exercice, qui nous montre que vous avez maintenant atteint l'objectif d'apprentissage.

Répétez cet exercice autant de fois que nécessaire.